TITLE:

Degenerations of minimal surfaces with non-negative Kodaira dimensions

AUTHOR(S):

角田, 秀一郎

CITATION:

角田, 秀一郎. Degenerations of minimal surfaces with non-negative Kodaira dimensions. 代数幾何学シンポジューム記録 1981, 1981: 270-285

ISSUE DATE:

1981

URL:

http://hdl.handle.net/2433/212597

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI
Kyoto University Research Information Repository

代数幾何学シンポジウム記録
1981年度　pp.270-285

Degenerations of minimal surfaces with non-negative Kodaira dimensions

阪大・理　　宮田秀一郎

§0. 非特異射影曲線の退化問題を考えるとき，(準)安定曲線が重要な役割をはたすことはよく知られている(cf. [1])．そこで，曲面の場合に(準)安定曲線に対応するものはなにかということが問題となる．これに関するひとつの結果をこの拙論において述べてみたい．

§1. 結果をのべるためにひとつ定義をします．$\pi : \mathcal{X} \to D$ が semistable reduction of minimal surfaces であるとは，次の4つの条件をみたすことをいう([1])：

① $\mathcal{X}$ 3-dim complex mfd,
$D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$,

② π はある projective morphism の localization になっている，

③ t が 0 でないとき，$\pi^{-1}(t)$ は nonsingular minimal surface で，$\kappa(\pi^{-1}(t)) \geq 0$，

④ $\pi^{-1}(0)$ は reduced かつ simple normal crossings.

結果は次の通り．

Theorem 1.1. $\pi: \mathfrak{X} \to D$ を semistable reduction of minimal surface とする．このとき，proper (flat) morphism $\pi': \mathfrak{X}' \to D$ と birational map $\varphi: \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ が存在して次をみたす：

(0) $\pi' = \pi \cdot \varphi$

(1) $\mathfrak{X}'$ は canonical sing しかもたない 3-dim. complex variety,

(2) φ は $\pi'^{-1}(0)$ の外で同型，

(3) $\mathfrak{X}'$ の index (cf. [3]) を r とすれば，$\mathfrak{X}'$ の dualizing sheaf $\omega_{\mathfrak{X}'}$ の r 回 tensor

積の double dual $\omega_X^{[r]}$ は invertible となり，$\omega_X^{[r]}|_{\pi'^{-1}(0)}$ は numerically effective.

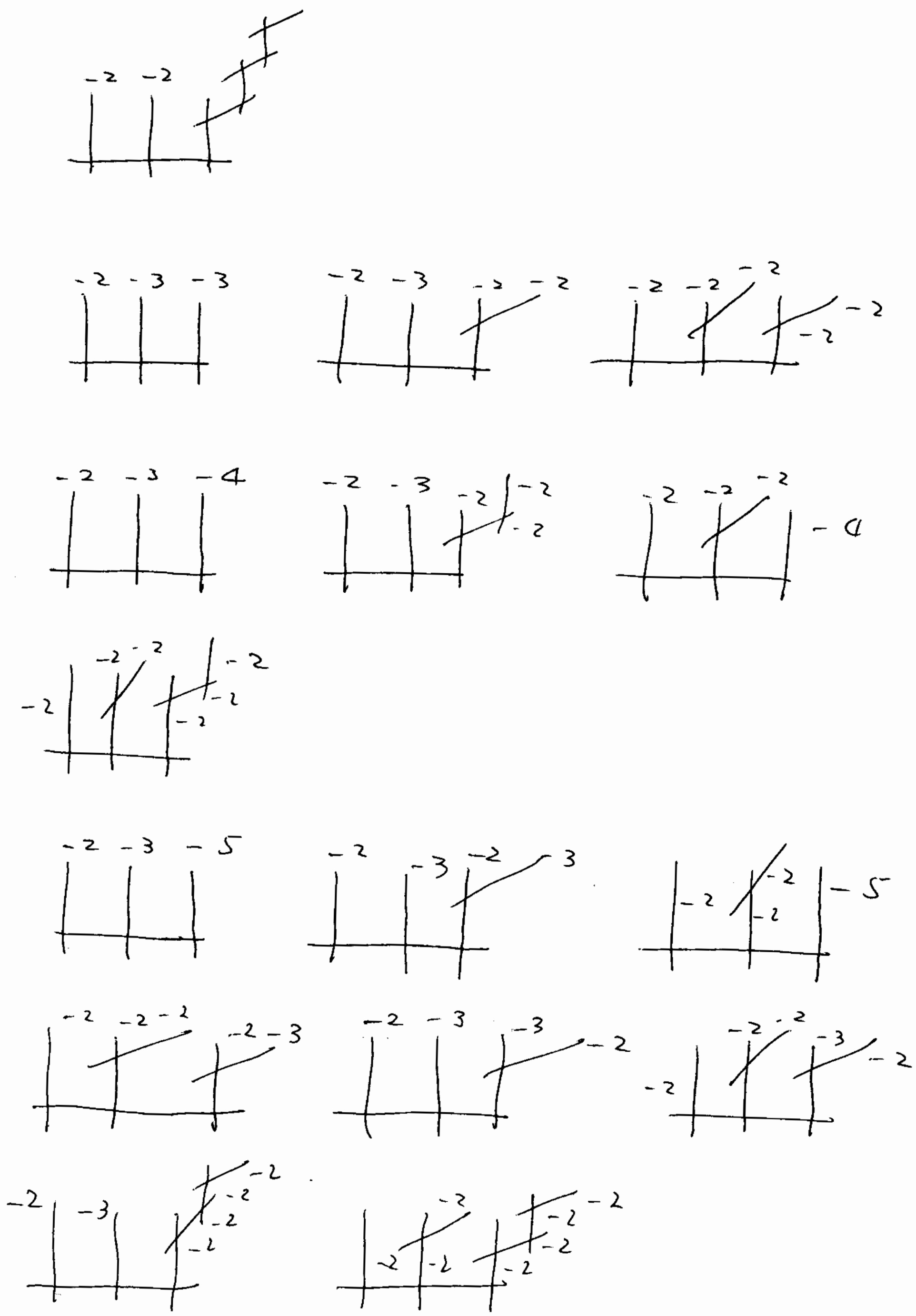
§3 で この定理の証明の outline を説明しますが，その前に，証明に必要な open surface theory の結果を §2 において述べます．

§2. $\bar{Y}$ を normal proj. surface, B を $\bar{Y}$ 上の reduced (Weil) divisor とする．このとき，$(\bar{Y}, B)$ が高々 Kawamata sing. であるとは，次をみたすことをいう：

① $P_1, \ldots, P_s, P_{s+1}, \ldots, P_r$ を $\bar{Y}$ の singular point 全体とし，さらに $P_1, \ldots, P_s \in B$, $P_{s+1}, \ldots, P_r \notin B$ とする．このとき，$B - \{P_1, \ldots, P_s\}$ は $\bar{Y} - \{P_1, \ldots, P_r\}$ 上 simple normal crossings；

② $P_1, \ldots, P_s \in Reg(B)$ かつ $P_1, \ldots, P_s$ は cyclic quotient sing. かつ $P_{s+1}, \ldots, P_r$ の minimal resolution は次のいずれか．

4



ここで，直線は nonsingular rational curve をあらわし，数字はその curve の self-intersection number をあらわす．

$(\bar{Y}, B)$ を高々 Kawamata sing. をもつ pair とすると，$r(\omega_{\bar{Y}}+B)$ が invertible sheaf となる正整数 r が存在する．この r を $(\bar{Y}, B)$ の index という．

このとき次の定理が成立する．

Theorem 2.1. $(\bar{Y}, B)$ を高々 Kawamata sing. をもつ pair で，index r とする．もし $r(\omega_{\bar{Y}}+B)$ が num. eff. でなければ，$(\bar{Y}, B)$ ~~が~~ 次のいずれかをみたす：

(A) ある同型でない birational morphism $f: \bar{Y} \to \bar{Z}$ が存在して，$(\bar{Z}, f_*(B))$ は Kawamata sing. しかもたない．

(B) ある nonsing. proj. curve C への surj. morphism $\pi: \bar{Y} \to C$ が存在して，すべての fiber

は irreducible で, かつ, general fiber を $Y := \bar{Y} - B$ に制限すると, $\mathbb{P}^1$ または $\mathbb{A}^1$ と同型,

⑩ $(r(\omega_{\bar{Y}} + B))^{-1}$ が ample で $\bar{Y}$ の picard number は 1.

この定理の証明には Mori theory [2] の open surface への拡張を使います. それをのべるために少し準備をします.

$(\bar{Y}, B)$ を上の通りとして, $N(\bar{Y})$, $\overline{NE}(\bar{Y})$, $\overline{NE}_\varepsilon(\bar{Y}, B)$ を次のように定義します.

$N(\bar{Y}) :=$ {1-cycle on $\bar{Y}$}$/(\equiv) \otimes \mathbb{R}$,

$\overline{NE}(\bar{Y}) :=$ effective 1-cycle をふくむ最小の closed convex cone,

$\overline{NE}_\varepsilon(\bar{Y}, B) := \{ Z \in \overline{NE}(\bar{Y}) \mid (Z, \frac{1}{r}(r(\omega_{\bar{Y}} + B))) \geq -\varepsilon(Z, L) \}$,

ここで ε は正の実数, L は $\bar{Y}$ 上の ample divisor

このとき, 次の lemma 2.2 が成立し, これから Theorem 2.2. が導かれます.

Lemma 2.2. 任意の $\varepsilon (>0)$ に対し, curves $C_1, \cdots, C_l$ が存在し, 次をみたす:

① $\overline{NE}(\bar{Y}) = \sum \mathbb{R}_+[C_i] + \overline{NE}_\varepsilon(\bar{Y}, B)$

② C_i は rational curve で、

$0 > (\frac{1}{r}(r(\omega_{\bar{Y}} + B)), C_i) \geq -3$.

この lemma 2.2. は [2] における $B=0$, $\bar{Y}$=n-s. の場合の証明と同様です。

Lemma 2.2. の仮定で、①.②をみたす $C_1, \dots, C_l$ に対して、l を最小にしたときの各 C_i を extremal rational curve w.r.to $\omega_{\bar{Y}}+B$ といいます。

C_i を extremal curve とすると、num. eff divisor H on $\bar{Y}$ で、$H^\perp \cap \overline{NE}(\bar{Y}) = \mathbb{R}_+[C_i]$ をみたすものが存在する。 m を十分大きな整数としたとき、mH に対応する rational map Φ_{mH} が、Theorem 2.1. における $\bar{Y}$ の構造を定める。つまり、$\dim \Phi_{mH} = 2$ ならば、ⓐの case がおき、Φ_{mH} は Th 2.1 の記号で、f と一致し、$\dim \Phi_{mH} = 1$ ならば、ⓑがおき、$\Phi_{mH} = \pi$, $\dim \Phi_{mH} = 0$ ならば、Φ_{mH} は $\bar{Y} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ と一致する。

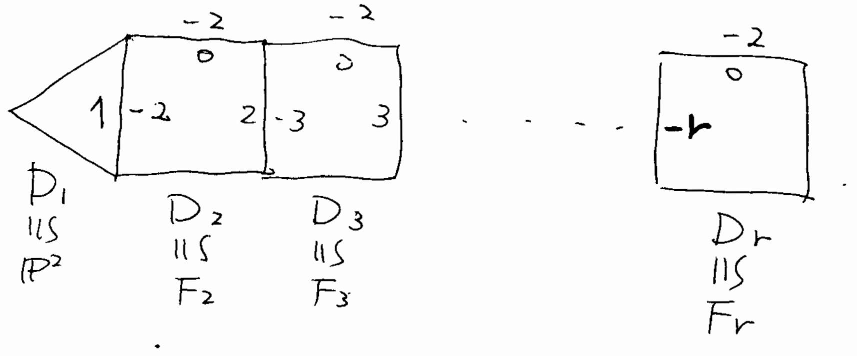
§3. Theorem 1.1 の証明.

まず，天下り的に次の singularity を定義します.
Y を 3-dim normal complex var., p を Y の singular point で，次の条件をみたすとき，p を type C_r の sing. pt. という：

① $Y-\{p\}$ nonsing.,

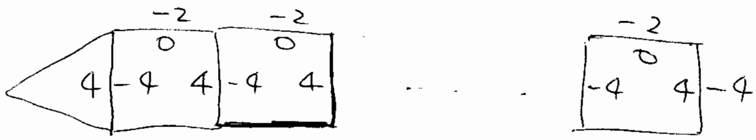
② p のある resolution $f: \tilde{Y} \to Y$ をとると，$f^{-1}(p)$ が次の形：

$f^{-1}(p)=\sum_{i=1}^{r} D_i$ を既約分解とすると，
$\dim D_i = 2$ で，$D_1 \cong \mathbb{P}^2$，$D_i \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i))$
（右は Hirzebruch surface で F_i とかく），
さらに，各 D_i は下の図のようにまじわっている.



ここで, line の両側の数字は対応する curve の normal bundle をあらわし, 各 D_i の中の数字は D_i における self-intersection number であらわし, また F_i は Hirzebruch surface $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(i))$ をあらわす.

同様に P が type D_r の sing. pt. であるとは, ある resolution $f: \tilde{Y} \to Y$ をとったとき, $f^{-1}(P) = \sum D_i$ が次の形のときをいう:



$D_1 = \mathbb{P}^2 \quad D_2 \cong D_3 \cong \cdots \cong D_r \cong F_4$.

Proposition 3.1. type C_r, type D_r の sing. pt. は canonical sing. ([3]).

次の lemma 3.2. から Theorem 1.1 は容易に導かれる.

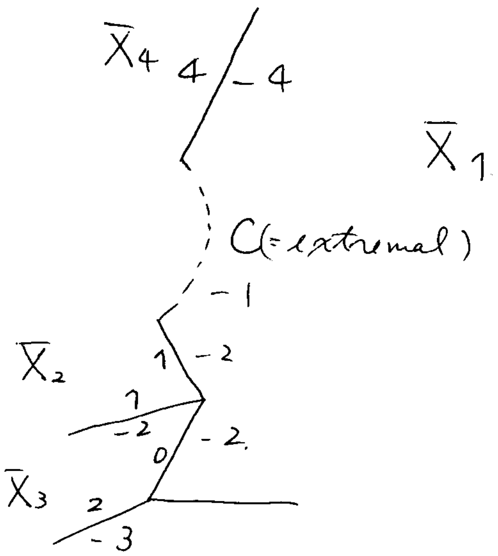
Lemma 3.2. $\pi: \mathcal{X} \to D$ を semi stable

reduction of minimal surfaces とする，ただし条件②のかわりに②′ $\pi^{-1}(0)$ が projective を仮定する． X を $\pi^{-1}(0)$ の既約成分の一部で，X の各連結成分はそれぞれ type C_r，type D_r の sing. を定義しかつその中で，最大のものとする． $\mu: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ を X の contraction，s を $\mathfrak{Y}$ の index とする．
このとき，もし $\omega_{\mathfrak{Y}}^{[s]}$ が num. eff. でなければ，ある birational map $\varphi: \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ が存在して，$\pi\cdot\varphi$ は semistable reduction of minimal surfaces（ただし②′だけをみたす）でかつ $(\pi\cdot\varphi)^{-1}(0)$ の既約成分の個数は $\pi^{-1}(0)$ の既約成分の個数より少なくなる．

Proof.（Outline） まず，$\omega_{\mathfrak{Y}}^{[s]}$ not num. eff を仮定する． $p = \pi\cdot\mu^{-1}$ とおき，$p^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{l} Y_i$ を既約分解とする．このとき，$\mathfrak{Y}$ が高々 type D_r C_r の sing. であることから，$(Y_i,\ B_i := p^{-1}(0) - Y_i|_{Y_i})$ は高々 Kawamata sing. であることがわかる．一方，$\omega_{\mathfrak{Y}}^{[s]}|_{Y_i} = s(\omega_{Y_i} + B_i)$ であることに注意する．すると，ある i に対して，Y_i が extremal curve を

ふくむことがわかる。さらに C をその extremal curve で、C が他の $\bar{Y}_j$ $(j \neq i)$ にふくまれた場合には、C は $\bar{Y}_j$ においても extremal ではないことがわかる。このとき、C に注目しながら、φ をつくるわけであるが、どの case でも、φ のつくり方は同じようなものなので、次の簡単ではあるが、典型的な場合についてのみ考察しよう。

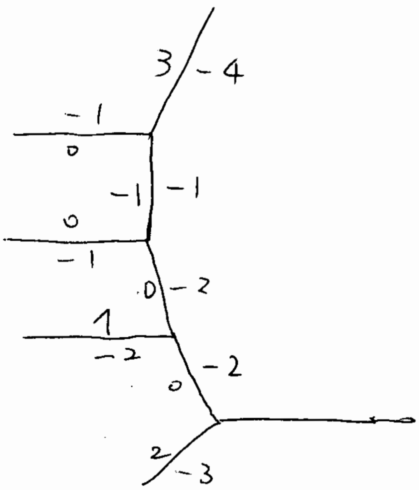
$i=1$ で、$\bar{Y}_1$ の X における proper transform を $\bar{X}_1$ として、他の component が下図のようになっているとする：



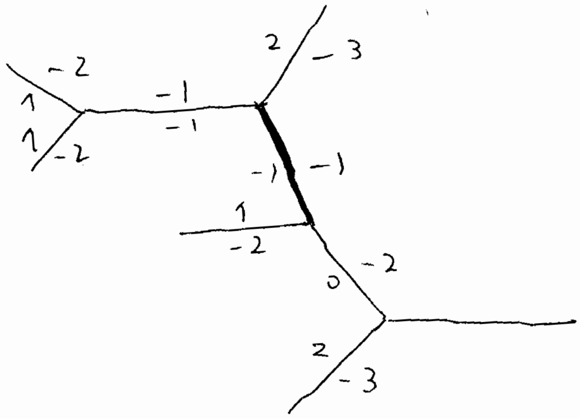
ここで、$\bar{X}_2+\bar{X}_3+\bar{X}_4$ を contraction したものが

せで，$\bar{X}_4$ は type D_1 ($= C_1$) の sing を定義し，
$\bar{X}_2 + \bar{X}_3$ が type C_2 の sing. を定義する．C は $\bar{X}_1$
において exceptional curve of the first kind
である．

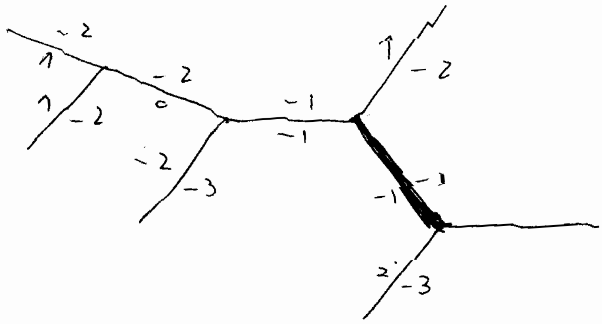
まず，C で blow-up する；



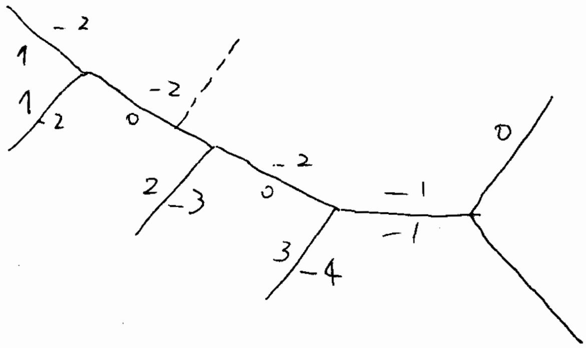
次に normal bundle が $\underbrace{(-1,-1)}_{}$ となっている curve で
blow-up して，できた $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を別の方向へ blow-
-down する（[4]）：



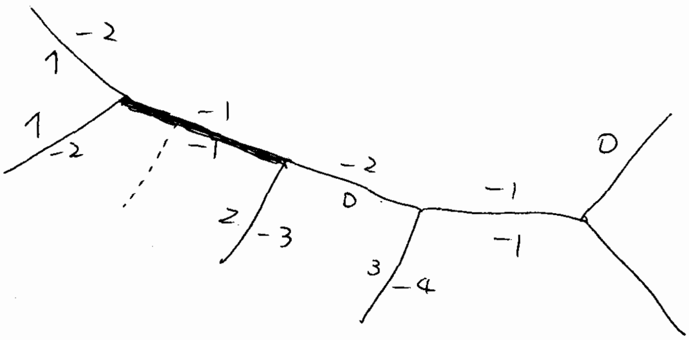
次に上図の太線についてで同様の操作をし，次の図を得る：



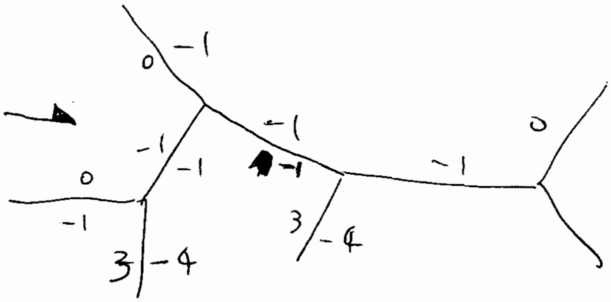
太線について同じ事をやる：



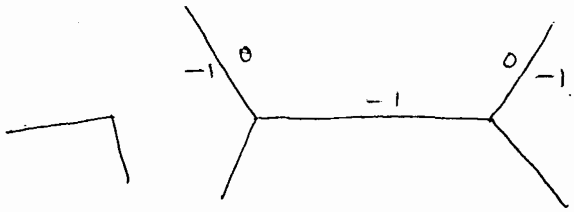
ここでは、X_4 に注目すれば、$X_4 \cong \mathbb{P}^2$ から 4回 blow up したものがでてくる。このことから、点線の位置に $(-1,-1)$ curve が存在することがわかる。そこで、blow-up と blow-down の操作をすると、次の図になる。



太線をもとにて次図をえる；



上の図の矢印の component は nonsing curve に contract できる (cf.[4]).



次に、はじめの $\mathfrak{X}_4$ の proper transform が contract できる。この contraction の結果が $\mathfrak{X}'$ に対応する。

他の場合にも上と同様のやり方で φ をつくることができる。

References

[1] Deligne, P. and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. Publ. I.H.E.S. 36(1969). P75.

[2] Mori, S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, to appear.

[3] Reid, M. Canonical Threefolds, in Journées de géometrie algébrique d'Angers, ed. A. Beauville, Sijthoff and Noordhoff, Alphen (1980) 273-310.

[4] Nakano, S. On the inverse of monoidal transformations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6 (1970-71), 483-502.